

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Лекция №1, 2

План лекции:

1. Вынужденное движение жидкости (газа). Понятие пограничного слоя.
2. Интегральные характеристики течения

1. ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ (ГАЗА). ПОНЯТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости и уравнение энергии были получены в середине XIX века. Они представляют собой математическую формулировку **законов сохранения массы**, **сохранения импульса** (второго закона Ньютона) и **сохранения энергии** (в виде первого начала термодинамики) для элементарного объёма жидкой или газообразной среды. Если в уравнении сохранения импульса ограничиться учётом действия только сил давления, трения и тяжести, а в уравнении энергии учесть только перенос тепла за счёт теплопроводности и конвекции (перенос энтальпии движущимися молями среды), то для плоского течения систему уравнений можно записать следующим образом.

$$\left. \begin{aligned}
 &\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y}}_{\text{сохранение массы}} = 0, \\
 &\underbrace{\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}}_{\text{конвекция}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right)}_{\text{трение}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{давление}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{сила тяжести}}, \\
 &\underbrace{\rho \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \rho w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}}_{\text{конвекция}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)}_{\text{трение}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{давление}} + \underbrace{\rho g_y}_{\text{сила тяжести}}, \\
 &\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p w_y \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{конвекция}} = \underbrace{w_x \frac{\partial p}{\partial x} + w_y \frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{работа против силы давления}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\text{теплопроводность}} + \underbrace{\rho \dot{q}_s}_{\text{внутренние источники теплоты}}, \\
 &\underbrace{+ 2\mu \left(\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 \right)}_{\text{работа против сил трения}}, \\
 &\underbrace{p = \rho RT}_{\text{идеальный газ}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) прямо называть уравнением неразрывности потока, второе и третье – уравнениями движения, и четвёртое – уравнением энергии.

Система уравнений (1) является основой для теоретического анализа задач, динамики жидкости, теплообмена при свободной и вынужденной конвекции, дозвуковых и сверхзвуковых течений и многих других. Как видно система состоит из 5 уравнений, причём три из них являются нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка, что определяет значительные трудности в её решении. Тем не менее, **система уравнений является замкнутой**, и, при известных значениях переносных функций

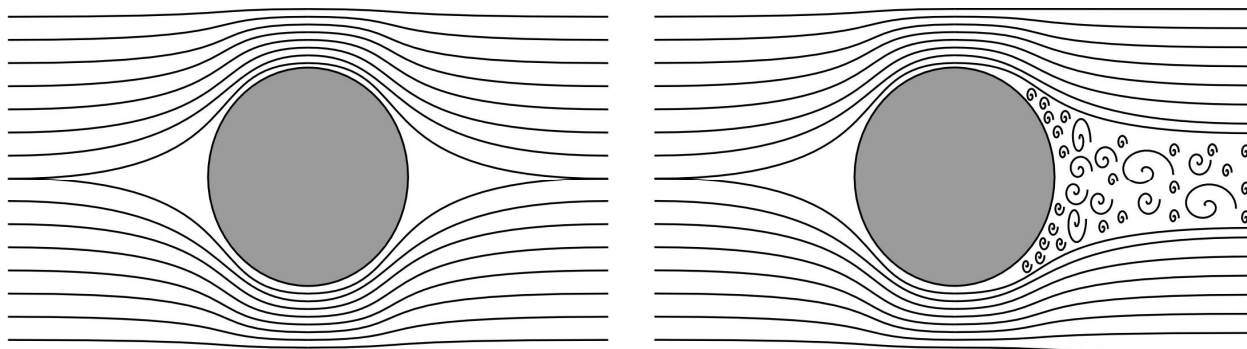
(коэффициента теплопроводности λ и коэффициента динамической вязкости μ), содержит 5 неизвестных ρ, p, w_x, w_y, T , которые являются функциями двух независимых переменных x, y .

До начала XX века теоретическое решение многих практически важных задач теплообмена и гидродинамики было затруднительно. Это объясняется тем, что аналитическое решение полных уравнений (1) невозможно, а численное решение требует применения мощных компьютеров.

В XIX веке были решены лишь некоторые частные задачи, в которых **полагались равными нулю конвективные члены** (инерционные силы) в уравнениях Навье-Стокса. Одной из таких задач является **задача определения гидравлического сопротивления при развитом ламинарном течении жидкости в трубе**.

Вместе с тем в XIX веке были достигнуты большие успехи в изучении движения идеальной (лишенной свойства вязкости) жидкости. С помощью **уравнений Эйлера** (уравнений не учитывающих действие вязких сил) можно рассчитать поле скорости в окрестности обтекаемого тела и определить силы давления на поверхность тела.

Однако теория движения идеальной жидкости не объясняла причину возникновения вихрей в кормовой части плохо обтекаемых тел. В случае поперечного обтекания цилиндра она приводила к **парадоксу Даламбера**: ввиду симметричного распределения давления по окружности цилиндра сила сопротивления равна нулю.



В 1904 году немецкий ученый Л. Прандтль опубликовал работу «**О движении жидкости при очень малом трении**», в которой обратил внимание на то, что при обтекании твердого тела влияние сил вязкости может быть существенным только в области тонкого пограничного слоя, а за его пределами им можно пренебречь.

Другими словами, весь поток жидкости он разбил на две части: **внешний поток** и **пограничный слой**. Для внешнего потока справедлива теория движения идеальной жидкости (т.е. справедливы уравнения Эйлера). Для пограничного слоя справедливы уравнения Навье-Стокса, причем посредством такого допущения, как малая толщина пограничного слоя

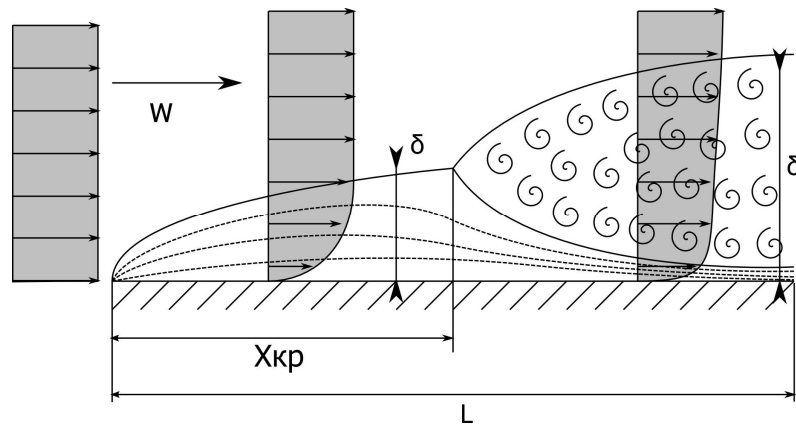
$$\delta/L \ll 1,$$

эти уравнения удалось существенно упростить.

Таким образом, были заложены **основы теории пограничного слоя**, которая сыграла большую роль в изучении процессов тепломассообмена. Достижения в развитии авиации и ракетно-космической техники неразрывно связаны с успехами в решении проблем теории пограничного слоя.

При обтекании твердого тела потоком жидкости или газа вблизи поверхности благодаря силам вязкости происходит резкое уменьшение скорости, и на поверхности тела

она становится равной нулю. Слой жидкости, в котором скорость движения изменяется наиболее существенно, называется **динамическим пограничным слоем**.



Теоретически изменение скорости может наблюдаться на большом расстоянии от поверхности, но вдали от тела скорость изменяется незначительно. Толщиной динамического пограничного слоя δ условились считать расстояние от твердой стенки до поверхности, где скорость составляет 99% от скорости невозмущенного потока.

Толщина динамического пограничного слоя зависит от вязкости и скорости потока, а также от положения рассматриваемого сечения на поверхности: чем меньше вязкость жидкости и больше ее скорость, чем меньше расстояние рассматриваемого сечения от начала формирования пограничного слоя, тем тоньше пограничный слой.

Дифференциальные уравнения динамического пограничного слоя получаются на основе дифференциальных уравнений движения и неразрывности системы (1). Рассмотрим вывод уравнений для двумерного стационарного течения вдоль оси x . Влиянием массовых сил пренебрегаем, течение считаем несжимаемым ($\rho = \text{const}$), а коэффициент динамической вязкости - постоянным ($\mu = \text{const}$).

Выпишем исходные уравнения Навье - Стокса в безразмерном виде, введя характерные масштабные множители:

$$\bar{w}_x = w_x / w_{x0}; \quad \bar{w}_y = w_y / w_{x0}; \quad \bar{x} = x / L; \quad \bar{y} = y / L; \quad \bar{p} = p / (\rho w_{x0}^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} &= 0; \\ \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_y}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \quad (2)$$

Проведём оценку порядка величин входящих в уравнения (2).

Сущность оценки порядка величины можно понять на следующем примере. Если какая-то величина z меняется в диапазоне от 0 до z_0 , то мы говорим, что это величина порядка z_0 , а безразмерная величина $\bar{z} = z / z_0$ будет иметь порядок 1.

В нашем случае в пограничном слое скорость w_x меняется от 0 до w_{x0} , значит $\bar{w}_x$ имеет порядок 1, x меняется от 0 до L , значит $\bar{x}$ имеет порядок 1.

В пределах пограничного слоя y меняется от 0 до δ , значит y имеет порядок δ , а $\bar{y}$ величина порядка $\bar{\delta} = \delta/L \ll 1$.

Оценка для всех членов уравнений (2) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} = 0;$$

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}} = 1 \quad \boxed{\bar{w}_y \sim \bar{\delta}}$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (3)$$

$$1 \frac{1}{1} = 1 \quad \bar{\delta} \frac{1}{\bar{\delta}} = 1 \quad \bar{\delta}^2 \left(\frac{1}{1^2} = 1 \quad \frac{1}{\bar{\delta}^2} \right) \quad 1 \quad \boxed{\text{Re} \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}; \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\rho \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}}}$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_y}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (4)$$

$$1 \frac{\bar{\delta}}{1} = \bar{\delta} \quad \bar{\delta} \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}} = \bar{\delta} \quad \bar{\delta}^2 \left(\frac{\bar{\delta}}{1^2} = \bar{\delta} \quad \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}^2} = \bar{\delta} \right) \quad \bar{\delta} \quad \boxed{\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \bar{\delta}}$$

В пределе при $\bar{\delta} \rightarrow 0$ получим систему дифференциальных уравнений динамического пограничного слоя:

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial \bar{y}} = 0;$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (5)$$

Или в размерном виде:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0 \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \frac{dP}{dx} \\ P(y) &= \text{const} \end{aligned}} \quad (6)$$

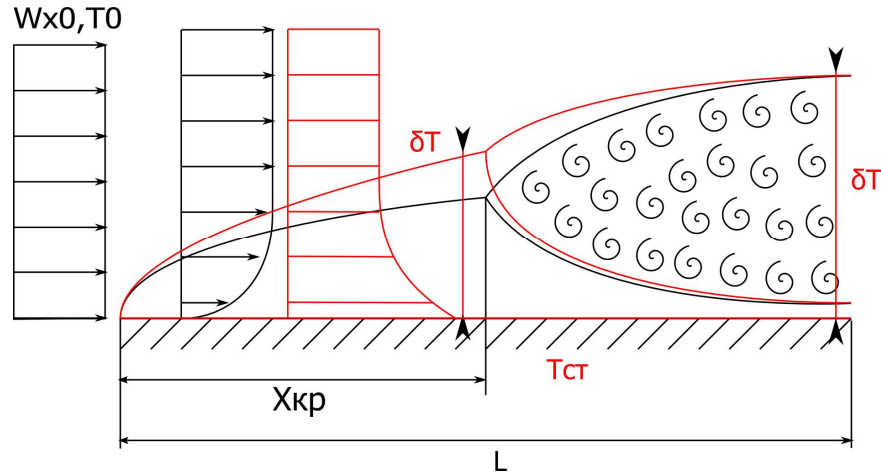
Как следует из вывода, уравнения пограничного слоя строго справедливы только при числе Рейнольдса $\text{Re} \rightarrow \infty$, при этом по толщине пограничного слоя давление не изменяется, а поперечная скорость потока w_y пропорциональна толщине пограничного слоя и может быть выражена следующим образом:

$$w_y \sim \frac{w_{x0} \delta}{L} \quad (7)$$

Из оценки величины числа Рейнольдса можно получить выражение для оценки толщины динамического пограничного слоя:

$$\bar{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \Rightarrow \boxed{\delta \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}} \quad (8)$$

Существует также понятие **теплового пограничного слоя** – это область течения вблизи обтекаемой поверхности, в которой температура потока изменяется от температуры стенки до температуры внешнего течения.



Дифференциальное уравнения теплового пограничного слоя можно получить тем же методом оценки порядка величин и для случая несжимаемого низкоскоростного потока с постоянным коэффициентом теплопроводности ($\lambda = \text{const}$) в отсутствии внутренних источников теплоты оно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} w_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + w_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2}; \quad \boxed{\text{Re} \cdot \text{Pr} \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}} \\ \boxed{w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

при этом уравнение теплового пограничного слоя справедливо при $\text{Re} \cdot \text{Pr} \rightarrow \infty$.

Из оценки величины числа Пекле $\text{Re} \cdot \text{Pr}$ можно получить выражение для оценки толщины теплового пограничного слоя:

$$\boxed{\delta_T \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re} \cdot \text{Pr}}}} \quad (10)$$

При течении жидкости без градиента давления и $\text{Pr} = 1$ безразмерная форма уравнений движения (6) и энергии (9) полностью совпадают, а значит, совпадают и их решения. С точки зрения теории пограничного слоя это означает, что тепловой и динамический пограничные слои будут иметь одинаковую толщину по всей дине пластины.

$$\delta_T = \delta \quad (11)$$

При $\text{Pr} < 1$ тепловой пограничный слой будет больше динамического $\delta_T > \delta$, при $\text{Pr} > 1$ наоборот меньше $\delta_T < \delta$.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ

Полученные системы дифференциальных уравнений (1) и (6), (9) справедливы в любой точке выделенной области течения. Однако решение этих систем уравнений возможно только при известных граничных условиях. Постановка конкретной исследовательской или инженерной задачи связана с выбором соответствующей модели течения, определением границ расчётной области (геометрии течения) и заданием граничных и начальных условий.

Как правило, первичными расчётными данными являются поля давления, плотности, скорости и температуры. Полученные распределения могут ответить на частные вопросы. Уровень температур в той или иной области течения, расход теплоносителя, потери давления и др. Всё это важная информация для принятия конкретного конструкторского решения, но эта информация жёстко привязана к исследуемой модели.

Чтобы результаты единичного расчёта можно было использовать в дальнейшем, их следует представлять в безразмерном виде, используя принятые формы уравнений подобия. Уравнения подобия устанавливают связь между определяющими и определяемыми числами подобия.

С точки зрения динамики течения, как правило, интересуют такие параметры течения, как **коэффициент трения**:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho_0 w_0^2} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial n} \right)_w / \rho_0 w_0^2, \quad (12)$$

коэффициент гидравлических потерь:

$$\xi = - \left(\frac{dP}{dx} \right) \frac{2}{\rho w_x^2} d. \quad (13)$$

и ряд других.

С точки зрения теплообмена важную роль играют **коэффициент теплоотдачи**:

$$\alpha = \frac{q_w}{T_0 - T_w} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) / (T_0 - T_w), \quad (14)$$

и его безразмерные формы – **число Нуссельта**:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (15)$$

и **число Стантона**:

$$St_T = \frac{\alpha}{\rho_0 w_0 c_{p0}}. \quad (16)$$

Используя элементы теории подобия из уравнений (1) можно получить ряд определяющих чисел подобия:

$$\boxed{Ho = \frac{w_0 \tau_0}{L}} \text{ — число гомохронности} \quad (17)$$

Число гомохронности характеризует нестационарность процесса движения и его используют при изучении теплообмена в нестационарных (например, пульсирующих) потоках.

$$\boxed{Re = \frac{\rho_0 w_0 L}{\mu_0}} - \text{число Рейнольдса} \quad (18)$$

Число Рейнольдса отражает интенсивность вынужденного движения газа или жидкости.

$$\boxed{Eu = \frac{P_0}{\rho_0 w_0^2}} - \text{число Эйлера} \quad (19)$$

Число Эйлера определяет подобие полей давления. В задачах теплообмена это число является однозначной функцией числа Рейнольдса, и потому в уравнения подобия не вводится.

$$\boxed{Gr = \frac{\rho_0^2 g L^3 \beta \Delta T}{\mu_0^2}} - \text{число Грасгофа} \quad (20)$$

Число Грасгофа определяет интенсивность свободноконвективного движения.

$$\boxed{Pe = \frac{w_0 L}{a_0}} - \text{число Пекле} \quad (21)$$

Число Пекле отражает интенсивность конвективного переноса тепла по сравнению с переносом тепла теплопроводностью. Не трудно заметить, что число Пекле можно представить в виде: $Pe = Re \cdot Pr$, где

$$\boxed{Pr = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0}} - \text{число Прандтля.} \quad (22)$$

Число Прандтля отражает влияние свойств газа или жидкости на теплообмен.

$$\boxed{Fo = \frac{\tau_0 a_0}{L^2}} - \text{число Фурье} \quad (23)$$

Число Фурье характеризует динамику нестационарной теплопроводности.

Таким образом, чтобы в результате единичного численного исследования динамики течения и теплообмена получить формулу пригодную для оценки не только исследованных явлений, но и всех явлений, подобных исследованным, результаты необходимо представить в виде **уравнений подобия**:

$$\frac{c_f}{2}, \xi = f(Ho, Re, Gr) \text{ и } Nu, St_T = f(Ho, Re, Gr, Pr) \quad (24)$$

В стационарных условиях уравнения подобия будут выглядеть, следующим образом:

$$\frac{c_f}{2}, \xi = f(Re, Gr) \text{ и } Nu, St_T = f(Re, Gr, Pr) \quad (25)$$

В задачах с определяющим действием вынужденной конвекции:

$$\frac{c_f}{2}, \xi = f(Re) \text{ и } Nu, St_T = f(Re, Pr) \quad (26)$$

В задачах свободной конвекции:

$$\frac{c_f}{2}, \xi = f(Gr) \text{ и } Nu, St_T = f(Gr, Pr) \quad (27)$$

Для удобства обработки опытных данных уравнения подобия принято представлять в виде степенной функции:

$$\frac{c_f}{2}, \xi = c \operatorname{Re}^k \operatorname{Gr}^m \quad \text{и} \quad \operatorname{Nu}, \operatorname{St}_T = c \operatorname{Re}^k \operatorname{Gr}^m \operatorname{Pr}^n, \quad (28)$$

где: c, k, m, n - постоянные коэффициенты.